SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Giovanna Citti

PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DELL'EQUAZIONE DI LEVI CHE NON DIPENDONO DA IPOTESI DI CURVATURA

2 maggio 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Sunto In questo seminario presentiamo un risultato di regolarità nelle direzioni intrinseche per l'equazione di curvatura di Levi in $\mathbb{R}^3$. Indicati (x, y, t) i punti dello spazio, l'equazione si rappresenta

$$X^2u + Y^2u - (Xa + Yb)\partial_t u = q(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{1/2},$$

dove X e Y sono operatori differenziali del primo ordine

$$X_u = \partial_x + a\partial_t, \quad Y_u = \partial_y + b\partial_t,$$

e i coefficienti a e b dipendono in modo nonlineare dal gradiente. Nel caso lineare la struttura dell'algebra di Lie generata dai campi X e Y è nota a priori, e nel gruppo di Lie associato si studia la regolarità delle soluzioni. Nel caso non lineare dell'equazione di Levi la struttura dell'algebra di Lie non è nota. Introduciamo quindi un procedimento iterativo di regolarizzazione che ad ogni passo lavora in un gruppo di Lie diverso: per ogni k si dimostra che se u appartiene ad uno spazio $C^{k,\alpha}_{d,k-1}$ di funzioni Hölderiane di ordine $k + \alpha$ rispetto ad una distanza d_{k-1}, allora $u \in C^{k+1,\alpha}_{d,k}$. In questo modo si vede che u è di classe C^∞ in senso intrinseco, indipendentemente da ipotesi di curvatura.

Abstract In this seminary we prove a regularity result in the intrinsic directions for the solutions of the Levi equation in $\mathbb{R}^3$. We denote (x, y, t) the points of the space, and represent the equation in the form

$$X^2u + Y^2u - (Xa + Yb)\partial_t u = q(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{1/2},$$

where X and Y are first order differential operators

$$X_u = \partial_x + a\partial_t, \quad Y_u = \partial_y + b\partial_t,$$

and the coefficients a and b nonlinearly depend on the gradient. The regularity problem had already been studied in the linear case, when the structure of the Lie algebra generated by X and Y is known a priori. In the nonlinear situation afforded here the structure of the Lie algebra generated by X and Y is not known. The we introduce a new iterative procedure, changing our Lie group at each step: for every k we prove that, if u belongs to a class $C^{k,\alpha}_{d,k-1}$ of Hölder continuous functions of order $k+\alpha$ with respect to a distance d_{k-1}, then $u \in C^{k+1,\alpha}_{d,k}$. In this way we prove that u is of class C^∞ in an intrinsic sense, with no assumptions on the curvature of its graph.

1 Introduzione

In questo seminario presento un risultato di regolarità per le soluzioni dell' equazione di Levi.

L'equazione che si presenta in maniera naturale nello studio delle proprietà geometriche delle ipersuperfici reali di $\mathbb{C}^2$, in particolare nello studio di domini di olomorfia ed inviluppi di olomorfia.

Per semplicità identifichiamo localmente un'ipersuperficie di $\mathbb{C}^2$ con il grafico di una funzione u di tre variabili reali, e con valori reali. Indichiamo Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_1, x_2, t) gli elementi dello spazio $\mathbb{R}^3$ e per ogni funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ consideriamo i campi vettoriali

$$X = \partial_x + a\partial_t, \quad Y = \partial_y + b\partial_t, \tag{1}$$

dove

$$a = \frac{u_y - u_x u_t}{1 + u_t^2} \quad \text{and} \quad b = -\frac{u_x + u_y u_t}{1 + u_t^2}. \tag{2}$$

Allora l'operatore di Levi si rappresenta

$$\mathcal{L}u = X^2 u + Y^2 u - (X_u a + Y_u b)\partial_t$$

e la curvatura di Levi del grafico di u risulta

$$curv(u) = \frac{\mathcal{L}u}{(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{1/2}}. \tag{3}$$

Qui studiamo l'equazione

$$\mathcal{L}u = q(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{1/2} \; in \; \Omega, \tag{4}$$

dove $q : \Omega \to \mathbb{R}$, è una fissata funzione regolare. L'equazione rappresenta, per (3) l'equazione delle funzioni u che in ogni punto hanno curvatura di Levi q prescritta in ogni punto.

Qui proviamo che le soluzioni classiche di (4) sono di classe C^∞ nelle direzioni dei campi X e Y, in mancanza di ipotesi di curvatura. Il problema cruciale è che in questo caso non è noto a priori il gruppo di Lie naturale associato all'equazione.

1.1 Risultati di esistenza

L'equazione (4) può essere pensata come un'equazione quasilineare ipoellittica del second'ordine i cui coefficienti dipendono dal gradiente. Poiché $\mathcal{L}$ è somma di quadrati di somma di quadrati di due campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$ allora la forma caratteristica associata ha rango 2 in ogni punto, ed è quindi degenere in ogni punto.

Tuttavia l'operatore verifica ipotesi di struttura che consentono di determinare soluzioni viscose, o di applicare tecniche di geometria complessa. Il

problema di Dirichlet per l'equazione stazionaria (4) è stato studiato da Bedford e Gaveau, che hanno provato in [2] un risultato di esistenza di soluzioni classiche, meno regolari del dato al bordo, che enunciamo in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, (identificato come sopra con $\mathbb{R}^3$).

Teorema 1.1 *Sia Ω un aperto strettamente pseudoconvesso $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ di classe C^2 e $\phi \in C^{m+5}(\partial\Omega)$. Supponiamo che $\partial\Omega$ si una 2-sfera e che esistano esattamente due punti p e q sul grafico di ϕ a tangenza complessa. Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

ha una soluzione u in $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega} - \{p,q\}) \cap Lip(\bar{\Omega})$, con $0 < \alpha < 1$.

Si veda anche [1], [3], [4], [18], che hanno indebolito notevolmente le ipotesi sull'aperto. L'equazione piú generale (4) è stata invece studiata da Slodkowsky e Tomassini che hanno provato in [19] l'esistenza di una soluzione Lipschitziana.

Teorema 1.2 *Sia Ω un aperto strettamente pseudoconvesso $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ di classe C^2 e $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Allora il problema di Dirichlet (5) ha una soluzione u in $Lip(\bar{\Omega})$.*

1.2 Regolarità delle soluzioni

Nei risultati di esistenza succitati la regolarità della soluzione è interamente ereditata dalla regolarità del dato al bordo. Quando si studia la regolarità interna, intervengono invece anche condizioni sulla curvatura. Infatti il commutatore di X e Y si esprime in termini della curvatura del grafico di u come segue:

$$[X,Y] = -\frac{curv(u)(1+a^2+b^2)^{3/2}}{(1+u_t^2)^{1/2}}\partial_t, \tag{6}$$

e quindi la struttura dell'algebra di Lie generata, almeno formalmente, dai campi X e Y dipende dalle ipotesi sulla curvatura di u. Come è noto, se X, Y fossero campi lineari di classe C^∞, una condizione sufficiente per l'ipoellitticità di un operatore scritto formalmente

$$L = X^2 + Y^2$$

sarebbe la condizione di Hörmander

$$\mathcal{L}ie(X,Y) = 3$$

in ogni punto. Nel nostro caso tuttavia i coefficienti non sono regolari, e non si può parlare di algebra di Lie. Anche i ben noti risultati di regolarità provati da G.B. Folland, E.M.Stein in [11] e L.Rothschild, E.M.Stein in [17] non si possono applicare nel caso nonlineare, per la mancanza di regolarità dei coefficienti. D'altra parte Franchi e Lanconelli in [12] hanno indicato come in alcuni caso

l'ipotesi sui commutatori si potesse sostituire con un'ipotesi di connettività. Sotto questa ipotesi hanno provato risultati di regolarità per operatori a coefficienti meno regolari, nella quale non ricadono però direttamente gli operatori qui studiati. Una teoria della regolarità è stata però sviluppata anche per operatori del tipo Levi a coefficienti poco regolari . In collaborazione con Lanconelli e Montanari abbiamo provato risultati di reglarità per soluzioni Lipschitziane dell'equazione di Levi, sotto ipotesi particolari sulla curvatura ([9]). Montanari ha provato in [15] risultati di regolarità riguardanti l'equazione parabolica associata a (4).

Qui considero per semplicità solo il problema della regolarità delle soluzioni classiche dell'equazione (4). Ricordo i risultati noti a questo proposito, che si differenziano per le diverse ipotesi di curvatura.

1.3 Regolarità per soluzioni con curvatura nulla

Nel caso di curvatura nulla ogni funzione di classe C^2 della sola variabile t è soluzione. Infatti in questo caso

$$a = b = 0,$$

e l' equazione di Levi diventa semplicemente

$$\partial^2_{xx} + \partial^2_{yy} = 0.$$

E' chiaro che soluzioni di questa equazione sono le funzioni armoniche nella variabili x e y, ma l'equazione non regolarizza nella terza variabile spaziale. Si ha quindi una foliazione in piani. In generale l'equazione si scrive formalmente

$$X^2 + Y^2 = 0,$$

dove X e Y commutano e anche in questo caso vale un risultato di foliazione.

Ricordo brevemente la definizione, che per comodità esprimo in coordinate reali.

Definizione 1.1 *Per ogni punto $\xi_0 \in \Omega$ esiste una superficie M_{ξ_0} passante per ξ_0 e tale che $u_{|M_{\xi_0}}$ è armonica. Inoltre la parametrizzazione Φ che definisce la varietà M_{ξ_0} dipende con continuità da ξ_0. Precisamente esiste un intorno U di ξ_0 e un omeomorfismo*

$$\Phi : B\times]-1,1[\to U,$$

tale che $\Phi(.,\tau)$ è parametrizzazione di $M_{\Phi(0,0,\tau)}$ per ogni fissato $\tau \in]-1,1[$.

Nel succitato risultato di esistenza di [2], infatti gli autori provano che

Teorema 1.3 *Il grafico della soluzione u è inviluppo di olomorfia del grafico di ϕ, è foliato in iper superfici M_{ξ_0}, che possono essere identificate con curve analitiche complesse. La foliazione è globale nel senso che Ω è unione disgiunta della foglie, che sono dischi complessi, regolari fino al bordo.*

I lavori di [1], [3], [4], [18] estendono anche questo aspetto della foliazione globale a classi pú ampie di aperti, con il metodo di Bishoph dei dischi analitici. Una versione locale degli stesso è stata provata in [6], con metodi di analisi reale.

1.4 Regolarità per soluzioni con curvatura non nulla

Supponiamo ora che sia verificata la condizione

$$[X, Y] \neq 0 \; in \; \xi, \quad per \; ogni \; \xi \in \Omega, \tag{7}$$

che, per la condizione (6), significa che la curvatura del grafico di u non si annulla in Ω. Allora è noto il risultato seguente:

Teorema 1.4 *Sia u soluzione di (4) di classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$, con $\alpha > \frac{1}{2}$, e soddisfacente (7) è di classe $C^{\infty}(\Omega)$(si veda [5]).*

In questa situazione i campi X, Y hanno il ruolo di una derivata prima, mentre al campo ∂_t che rappresenta il commutatore di ordine 2, assegnamo peso 2. Denotiamo quindi

$$D_1 = X \quad D_2 = Y \quad e \quad |(i)| = 1 \;\; se \;\; i \in \{1, 2\}.$$

Diamo poi la definizione seguente:

Definizione 1.2 *Se $\bar{\xi}$ è fissato in $\Omega \times R^3$, allora la funzione*

$$F_{\bar{\xi}} : e \to exp\Big(e_1 X + e_2 Y + e_3 \partial_t\Big)(\bar{\xi}) \tag{8}$$

è un diffeomorfismo dell'origine di $\mathbb{R}^3$ in un intorno $U_{\bar{\xi}}$ di $\bar{\xi}$ in $\mathbb{R}^3$. La sua funzione inversa $\Phi_{D,\bar{\xi}}$ definisce un cambiamento di variabili canonico. Per l'omogeneità che abbiamo assegnato alle diverse direzioni risulta naturale definire in R^3 la norma omogenea

$$||e||_2 = |e_1| + |e_2| + |e_3|^{1/2}.$$

E definire conseguentemente la distanza:

$$\forall \xi, \bar{\xi} \in U \;\; d_2(\xi, \bar{\xi}) = ||\Phi_{D,\bar{\xi}}(\xi)||_2.$$

Si veda [16] per le principali proprietà di questa distanza.

Corrispondentemente sono definite le classi di funzioni Hölderiane.

Definizione 1.3 *Denoteremo d_1 la distanza euclidea e $C^{k,\alpha}_{d,1}$ le usuali classi di funzioni Hölderiane. Diremo che f è di classe $C^{1,\alpha}_{d,2}$ se Xf e Yf sono Hölderiane rispetto alla distanza d_2. e analogamente definiremo $C^{k,\alpha}_{d,2}$ per ogni k naturale.*

Ovviamente la distanza non è equivalente alla distanza euclidea, ma se u è di classe $C^{2,\alpha}_{d,1}$ risulta di classe $C^{2,\alpha}_{d,2}$.

La situazione è simile nel caso in cui esista un punto ξ_0 tale che

$$[X, Y]_{|\xi_0} = 0 \quad [X[X, Y]]_{\xi_0} \neq 0. \tag{9}$$

Ovviamente se vogliamo calcolare i commutatori dei campi dobbiamo richiedere questa volta che u sia di classe C^3, rispetto ad una qualche distanza. In questo caso vale in seguente teorema,

Teorema 1.5 *Supponiamo che u sia una soluzione di classe* $C^{3,\alpha}_{d,2}$ *dell'equazione (4) in un aperto* Ω *di* $\mathbb{R}^3$*, e verifichi (9) in un punto* ξ_0*. Se la funzione* q *a secondo membro di (4) è di classe* $C^\infty(\Omega)$*, allora esiste un intorno di* ξ_0 *in cui* u *è di classe* C^∞ *([7]).*

Vista la condizione sui commutatori, in questo caso è naturale assegnare omogeneità 3 alla direzione ∂_t. La norma omogenea sarà allora

$$||e||_3 = |e_1| + |e_2| + |e_3|^{1/3}.$$

La corrispondente distanza sarà denotata d_3:

$$\forall \xi, \bar{\xi} \in U \ \ d_3(\xi, \bar{\xi}) = ||\Phi_{D,\bar{\xi}}(\xi)||_3,$$

e le classi di funzioni associate $C^{k,\alpha}_{d,3}$.

Denotiamo come segue le derivate di ordine superiore:

Definizione 1.4 *Definiamo come è usuale per ogni* $i, j \in \{1,2\}$,

$$ad(D_i, D_j) = [D_i, D_j].$$

Se poi $I \in \{1,2\}^k$, $I = (i_1, i_2)$, *con* $i_1 \in \{1,2\}$, $i_2 \in \{1,2\}^{k-1}$, *allora*

$$D_I = D_{i_1} D_{i_2}, \quad ad(D_I) = [D_{i_1}, ad(D_{i_2})]. \tag{10}$$

Il teorema precedente si generalizza allora in modo naturale:

Teorema 1.6 *Supponiamo che u sia soluzione di classe* $C^{k,\alpha}_{d,k-1} \cap C^{2,\alpha}_{d,1}$ *dell' equazione (4) in un aperto* Ω *of* $\mathbb{R}^3$ *e* $q \in C^\infty(\Omega)$*. Se esiste un punto* $\xi_0 \in \Omega$ *e un indice* I *tale che* $|I| = k$ *e* $ad(D_I)_{|\xi_0} \neq 0$*, allora* $u \in C^\infty$ *in un intorno di* ξ_0*.*

Ovviamente questa volta assegneremo alla direzione ∂_t omogeneità k, e definiremo di conseguenza un distanza d_k.

1.5 Risultati di regolarità indipendenti dalla curvatura

Il grosso limite di questa tecnica è che abbiamo bisogno di conoscere preliminarmente la struttura dell'algebra di Lie naturale associata alla funzione u, e se questa è di passo k, dobbiamo richiedere che u sia di classe C^k. In questo seminario vorrei indicando come studiare l'equazione anche senza ipotesi sulla curvatura, per ottenere il seguente teorema:

Teorema 1.7 *Sia* $u \in C^{2,\alpha}_{d_1}$ *allora per ogni k naturale e per ogni multiindice* $I \in \{1,2\}^k$ *esiste* $D_I u$*. Se poi esiste* ξ_0 *in* Ω *e* $I \in \{1,2\}^k$ *tale che* $ad(D_I)_{|\xi_0} \neq 0$*, allora* $u \in C^\infty$ *in un intorno di* ξ_0*.*

La prova del teorema si fa per induzione, utilizzando fra l'altro i teoremi che abbiamo enunciato precedentemente.

Passo 1 Sia u una funzione di classe $C^{2,\alpha}_{d,1}$, soluzione di (4), e sia ξ_0 fissato.

- Se il commutatore $[X,Y]_{|\xi_0}$ è non nullo, allora u è C^∞ intorno a ξ_0 per il Teorema 1.4.
- Se invece il commutatore si annulla nel punto ξ_0 proviamo il seguente:

  Teorema 1.8 *Supponiamo che $u \in C^{2,\alpha}_{d,1}$, e sia soluzione di (4), allora esiste un intorno U di ξ_0 tale che $u \in C^{3,\alpha}_{d,2}(U)$.*

Passo k Sia u una funzione di classe $C^{k,\alpha}_{d,k-1} \cap C^{2,\alpha}_{d,1}$, soluzione di (4) e sia ξ_0 fissato.

- Se esiste I tale che $|I| = k$ e $ad(D_I)_{\xi_0}$ è non nullo, allora u è C^∞ in un intorno di ξ_0 per il Teorema 1.6.
- Se invece tutti i commutatori di ordine k si annullano in ξ_0 vale il seguente:

  Teorema 1.9 *Supponiamo che $u \in C^{k,\alpha}_{d,k-1} \cap C^{2,\alpha}_{d,1}$, e sia soluzione di (4), allora esiste un intorno U di ξ_0 tale che $u \in C^{k+1,\alpha}_{d,k}(U)$.*

Il risultato di foliazione può essere collocato in modo naturale in quest'ottica: Se la curvatura è nulla, ogni commutatore di ordine k è nullo per ogni k. Siano ξ, ξ_1 punti che si possono congiungere con una curva integrale di ∂_t. La distanza nella direzione t fra i due, ha omogenietà ∞. In altre parole i due punti non si possono congiungere, come è naturale perché si trovano su due foglie distinte.

2 Schema della prova del Teorema 1.7

Per semplicità diamo solo un cenno della prova del Teorema 1.8. Fissiamo una funzione u soluzione dell'equazione (4), e consideriamo i campi vettoriali X, Y definiti in termini di u. E fissato per ipotesi un punto ξ_0 tale che

$$[X,Y]_{\xi_0} = 0.$$

Sia poi d_2 la distanza definita come nella Definizione 1.2. Poiché a e b sono di classe $C^{1,\alpha}_{d,1}$, si ha subito che

Proposizione 2.1 *Sia $\bar{\xi}$ un arbitrario punto in un intorno di ξ_0. Posto*

$$P^1_{\bar{\xi}} a(\xi) = a(\xi) + (x - \bar{x}) X a(\bar{\xi}) + (y - \bar{y}) Y a(\bar{\xi})$$

si ha

$$a(\xi) = P^1_{\bar{\xi}} a(\xi) + O(d_2(\xi, \bar{\xi})^{1+\alpha}) \ \ per\ \xi \to \bar{\xi}$$

e analoga relazione vale per b.

Osserviamo esplicitamente che l'algebra di Lie generata dai campi congelati al primo ordine che si scelgono abitualmente

$$X_{1,\bar{\xi}} = \partial_x + P^1_{\bar{\xi}} a(\xi)\partial_t, \quad Y_{1,\bar{\xi}} = \partial_x + P^1_{\bar{\xi}} b(\xi)\partial_t$$

non ha rango massimo in ogni punto. Definiremo invece, estendendo un'idea contenuta in [9]

$$X_{1,\bar{\xi}} = \partial_x + (P^1_{\bar{\xi}} a(\xi) + C(y - \bar{y}))\partial_t, \quad Y_{1,\bar{\xi}} = \partial_x + P^1_{\bar{\xi}} b(\xi)\partial_t.$$

Se C è sufficientemente grande questa scelta garantisce che l'algebra di Lie associata a $X_{\bar{\xi}}$ e $Y_{\bar{\xi}}$ è la medesima in ogni punto. Consideriamo l'associato operatore congelato:

$$L_{1,\bar{\xi}} = X^2_{1,\bar{\xi}} + Y^2_{1,\bar{\xi}} - (Xa + Yb)(\bar{\xi})\partial_t.$$

Questo è un operatore di tipo Hörmander e denotiamo $\Gamma_{1,\bar{\xi}}$ la sua soluzione fondamentale. La distanza di controllo $d_{2,\bar{\xi}}$ associata a questi campi risulta essere equivalente a d_2.

Ricordiamo che la derivata di Lie di una funzione f rispetto ad un campo vettoriale D_σ si definisce come segue:

Definizione 2.1 *Sia $f : \Omega \to R$, $\bar{\xi} \in \Omega$ e γ una curva integrale di D_σ, passante per $\bar{\xi}$. Se esiste la derivata*

$$\frac{d}{dh}(f \circ \gamma)_{|h=0},$$

allora la indichiamo $D_\sigma f(\bar{\xi})$, e si chiama derivata di f nella direzione D_σ nel punto $\bar{\xi}$.

Le classi di funzioni Hölderiane sono già state introdotte nella Definizione 1.3.

Poiché siamo interessati ad un risultato locale, fisseremo $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$, e scegliamo una funzione $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ tale che $\phi \equiv 1$ su Ω_1. Utilizzando l'esistenza di una soluzione fondamentale per l'operatore $L_{\bar{\xi}}$ si può rappresentare la soluzione nel modo seguente:

Teorema 2.1 *Supponiamo che u sia una soluzione di (4) di classe $C^{2,\alpha}_{d,1}$. Allora per ogni ξ e $\bar{\xi} \in \Omega$ possiamo rappresentare $u(\xi) = u\phi(\xi)$ nel modo seguente:*

$$\phi u(\xi) = A(\xi, \bar{\xi}) + B(\xi, \bar{\xi}) + C(\xi, \bar{\xi}),$$

dove

$$A(\xi, \bar{\xi}) = -\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi, \zeta)(a - P^1_{\bar{\xi}} a) X \partial_t u\phi(\zeta) d\zeta$$

$$-\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi, \zeta)(a - P^1_{\bar{\xi}} a) X_{1,\bar{\xi}} \partial_t u\phi(\zeta) d\zeta$$

$$-\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi, \zeta)(b - P^1_{\bar{\xi}} b) Y \partial_t u\phi(\zeta) d\zeta$$

$$-\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi,\zeta)(b - P^1_{\bar{\xi}}b)Y_{1,\bar{\xi}}\partial_t u(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta +$$

$$+\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi,\zeta)(y-\bar{y})\big(X\partial_t u(\zeta) - X\partial_t u(\bar{\xi})\big)\phi(\zeta)d\zeta +$$

$$+\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi,\zeta)(y-\bar{y})\big(X_{\bar{\xi}}\partial_t u(\zeta) - X\partial_t u(\bar{\xi})\big)\phi(\zeta)d\zeta +$$

$$+\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi,\zeta)q(1+a^2+b^2)^{3/2}(1+(u_t)^2)^{1/2}\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$B(\xi,\bar{\xi}) = 2X\partial_t u(\bar{\xi})\int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi,\zeta)(y-\bar{y})\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$C(\xi,\bar{\xi}) = \int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi,\zeta)\Big(u(\zeta)L_{1,\bar{\xi}}\phi(\zeta) + 2X_{1,\bar{\xi}}u(\zeta)X_{1,\bar{\xi}}\phi(\zeta) +$$

$$+2Y_{1,\bar{\xi}}u(\zeta)Y_{1,\bar{\xi}}\phi(\zeta) - u(\zeta)M_{\bar{\xi}}\phi(\zeta)\Big)d\zeta.$$

Prova La prova è una verifica diretta. Infatti per definizione di soluzione fondamentale si ha

$$u\phi(\xi) = \int \Gamma_{1,\bar{\xi}}(\xi,\zeta)L_{1,\bar{\xi}}(u\phi)(\zeta)d\zeta.$$

Inoltre si ha

$$L_{1,\bar{\xi}}(u\phi) = u(\zeta)L_{1,\bar{\xi}}\phi(\zeta) + 2X_{1,\bar{\xi}}u(\zeta)X_{1,\bar{\xi}}\phi(\zeta) + 2Y_{1,\bar{\xi}}u(\zeta)Y_{1,\bar{\xi}}\phi(\zeta) + \tag{11}$$
$$+(L_{1,\bar{\xi}}u - \mathcal{L}u + \mathcal{L}u)\phi(\zeta),$$

e la prova si ottiene da qui semplicemente valutando il termine $L_{1,\bar{\xi}}u - \mathcal{L}u$.

Osservazione 2.1 *I termini che abbiamo denotato con A sono convoluzioni di $\Gamma_{1,\bar{\xi}}$ con nuclei $(N_i)_{i=1,\cdots 6}$ tale che*

$$N_i(\bar{\xi},\zeta) \le d_2^{1+\alpha}(\bar{\xi},\zeta). \tag{12}$$

$$|N_i(\tilde{\xi},\zeta) - N_i(\bar{\xi},\zeta)| \le d_2(\bar{\xi},\zeta)d_2^{\alpha}(\bar{\xi},\tilde{\xi}), \tag{13}$$

per ogni $\tilde{\xi}$, $\bar{\xi} \in \Omega_1$, $\zeta \in \Omega$.

I termini indicati con B sono convoluzioni di $\Gamma_{1,\bar{\xi}}$ con una funzione di classe C^∞ e quindi sono di classe C^∞. I termini denotati C sono convoluzioni di $\Gamma_{1,\bar{\xi}}$ con una funzione che si annulla in un intorno del polo, e quindi sono di classe C^∞.

Analogamente le funzioni a e b hanno una rappresentazione dello stesso tipo:

Teorema 2.2 *Supponiamo che u sia una soluzione di (4) tale che $u \in C^{2,\alpha}_{1,\mathcal{L},loc}$, e $\partial_t u \in C^{1,\alpha}_{1,\mathcal{L},loc}(U)$. allora per ogni ξ e $\bar{\xi} \in U$ possiamo rappresentare $a(\xi) = a\phi(\xi)$ nel modo seguente:*

$$\phi a(\xi) = B_a(\xi,\bar{\xi}) + C_a(\xi,\bar{\xi}) + A_a(\xi,\bar{\xi}),$$

dove A_a, B_a e C_a sono integrali del tipo precedente.

A questo punto possiamo applicare una tecnica piuttosto generale che abbiamo introdotto in [5] e messo a punto in [8], e che ci permette di calcolare le derivate di espressioni di questo tipo come limiti di rapporti incrementali. In particolare possiamo applicare la seguente proposizione:

Proposizione 2.2 *Sia* $v \in C^{2,\alpha}_{d,2}(\Omega)$ *tale che per ogni* ξ, $\bar\xi \in \Omega_2$ *vale la seguente rappresentazione*

$$v(\xi) = \int \Gamma_{1,\bar\xi}(\xi,\zeta) N(\bar\xi,\zeta)\phi(\zeta)d\zeta,$$

dove N *è un nucleo verificante le condizioni (12) e (13). Allora* $v \in C^{3,\alpha}_{d,2}(\Omega_2)$.

Prova del Teorema 1.8 La prova si ottiene derivando la formula enunciata nel Teorema 2.1, tramite la Proposizione 2.2.

References

[1] H. Alexander, Polynomial hull of graphs, Pacif. J. Math, **147**, 1991, 201-212.

[2] E.Bedford, B.Gaveau, *Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in* C^2, Amer. J. Math., **105**, 1983, 975-1009.

[3] E.Bedford, W. Klingenberg, *On the Envelopes of holomorphy of a -spheres in* C^2, Journal of the A.M.S. , 4, 3, 1991, 623-646.

[4] E.M. Chirka, N.V. N.V.Ščerbina, *Pseudoconvexity of rigid domains and foliation of hulls of graphs*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **21**, 1995, 707-735.

[5] G.Citti, C^∞ *regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, cl. Sci. **23**, 3, (1996), 483-529.

[6] G. Citti, A. Montanari *Analitic estimates of solutions of the Levi equation* to appear on J. Differential equations.

[7] G. Citti, A. Montanari *Regularity properties of solutions of a class of elliptic-parabolic nonlinear Levi type equations* preprint

[8] G. Citti, A. Montanari, C^∞ *regularity of solutions of an equation of Levi's type in* R^{2n+1}, to appear on Advances in Diff. Eq.

[9] G. Citti, E. Lanconelli, A. Montanari *On the smoothness of viscosity solutions of the prescribed Levi-curvature equation* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 10, 1999, 61-68.

[10] G.B.Folland, *Subelliptic estimates and function on nilpotent Lie groups*, Arkiv f. Mat., **13**, 1975, 161-207.

[11] G.B. Folland, E.M.Stein, *Estimates for the* $\bar{\partial}_b$ *Complex and Analysis on the Heisenberg Group*, Comm. Pure Appl. Math. **20**, 1974, 429 - 522.

[12] B. Franchi, E. Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **10**, 1983, 523-541.

[13] L. Hörmander *Hypoelliptic second order differential equations* Acta Math., **119**, 1967, 147-171.

[14] G. Huisken, W. Klingenberg,*Flow of real hypersurfaces by the trace of the Levi form* Preprint.

[15] A.Montanari, *A smooth regularity result for real hypersurfaces evolving by mean Levi curvature* preprint.

[16] A.Nagel, E.M.Stein, S.Wainger *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties*. Acta Math. **155**, 1985, 103-147.

[17] L.Rothschild, E.M.Stein *Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups* Acta Math. **137**, 1977, 247-320.

[18] N.V.Ščerbina, *On the polynomial hull of a graph*. Indiana Univ. Math J., **42**, 1993, 477-503.

[19] Z.Slodkowski, G.Tomassini, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy*, J. Funct. Anal, **101**, no. 4, 1991, 392-407.

[20] Z.Slodkowski, G.Tomassini,*Evolution of subsets in* $\mathbb{C}^2$ *and a parabolic problem for the Levi equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, cl. Sci. **25**, (1997), 757-784.